



TITLE:

浅水系におけるジェットの非定常運動に伴う重力波放射について (波の非線形現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

杉本, 憲彦; 石岡, 圭一; 余田, 成男

CITATION:

杉本, 憲彦 ...[et al]. 浅水系におけるジェットの非定常運動に伴う重力波放射について (波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2005, 1430: 218-233

ISSUE DATE:

2005-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47349>

RIGHT:

浅水系におけるジェットの非定常運動に伴う重力波放射について

京大院・理 杉本 憲彦 (Norihiro Sugimoto)

京大院・理 石岡 圭一 (Keiichi Ishioka)

京大院・理 余田 成男 (Shigeo Yoden)

Graduate School of Science, Kyoto University

概要

f 平面浅水系において、非定常なジェットからの重力波放射を数値的に調べた。古典的な地衡流調節過程と異なり、フルード数 Fr が十分小さく、バランス力学が妥当な近似システムであると考えられるパラメータにおいて、重力波はほとんどバランスした回転成分流から継続的に放射された。重力波のソースを渦からの音波放射理論 (ライトヒル方程式) の類推によって導出し、ソースが回転成分流の強い領域に局在することを示した。このソースが時間とともに非定常に変化する過程で重力波は放射される。さらに、支配的な流れが非発散な回転成分流であるという仮定を用い、ソースを 1 項のみで近似することに成功した。また同時に、ライトヒル方程式の解より、遠方の帯状な重力波を理論的に計算した。バランスした擾乱のスケール則を考慮したスケール解析を全ソースに行い、近傍場とは別の近似ソースを導出した。これによって、遠方の帯状な重力波が計算可能である。この近似ソースは水深の緯度変化と緯度方向の質量フラックスの積の形で書ける点で物理的に理解しやすいだけでなく、古典的な渦による近似ソースより遠方の重力波を精度よく計算できた。

1. はじめに

重力波は大気中にあまねく存在し、かなりの量のエネルギーと運動量を運ぶことによって中層大気の大循環を駆動する点で重要な働きをする (Holton *et al.*, 1995)。重力波の励起源 (地形, 対流, ジェット, 前線, 台風) は質的には理解されている (Fritts and Nastrom, 1992; Sato, 2000) が、重力波の放射過程は未解決の問題で、特に非地形性のものについては理解が少ない。いくつかの研究は、強い回転成分流からの重力波放射を示唆している。たとえば、観測による研究では、極夜ジェット (Yoshiki and Sato, 2000) や、亜熱帯ジェット (Kitamura and Hirota, 1989; Sato, 1994; Plougonven *et al.*, 2003)、台風 (Pfister *et al.*, 1993; May, 1996) からの重力波放射が報告されている。同時に、大気大循環モデルを用いた研究では、ジェットの近傍に強い重力波振幅があることが指摘されている (Sato *et al.*, 1999)。しかしながら、これらの研究は放射される重力波の性質を報告しているのみである。何が重力波のソースになっていて、どのように回転成分流から重力波が放射されるのかについて説明されなければならない。

O'Sullivan and Dunkerton (1995) は大気大循環モデルを用いて傾圧波からの重力波放射を調べ、ジェット流の出口付近から重力波が放射されることを示した。Zhang (2004) もメソスケールモデルを用いて、同様の結果を得ている。しかしながらこれらのモデルには、重力波の放射に直接関わらないたくさんの複雑な過程が含まれている。何が本質的に重力波の放射を引き起こすのかを調べるため、我々は、バランスした回転成分流のモードとバランスしない重力波のモードを含む最も簡略化された

系である f 平面浅水系を用いた。Ford (1994) は同じ系において、渦列からの重力波放射を調べている。しかしながら、彼の研究は強制のない系を用いて、初期の不安定な渦列による重力波の放射過程のみを調べているため、流れが安定化した後には重力波は放射されない。そこで本研究では強制散逸系を採用し、流れを時間的に非定常にさせることで、回転成分流からの継続的な重力波放射を調べた。

我々の目的は、何が重力波放射を引き起こし、どのように回転成分流から重力波が放射されるかを理解することにある。それゆえ、実験はバランスした回転成分流に微小な擾乱を加えた状態からはじめて、順圧不安定なジェットを維持する強制によって流れを時間方向に非定常にさせた。強制は帯状なジェットを維持するために加えられたものであり、直接的に重力波を放射させるためのものではない。これらの継続的な重力波の放射過程は、初期にバランスしない状態を仮定する古典的なロスビーの地衡流調節過程 (Rossby, 1938; Gill, 1977) とは異なり、近年 Ford *et al.* (2000) らによって提案されている、突発的な重力波の放射過程と一致する。この放射過程は、バランス状態への調節過程ではなく、バランス状態からずれる調節過程である。最近、Vanneste and Yavneh (2004) は 3 次元ブシネスク方程式系を用いて、ロスビー数の小さな極限におけるバランスした流れからの突発的な重力波放射を調べた。彼らの結果によると、バランスした流れの非定常運動に伴った重力波放射は不可避である。これは重力波の放射がない、初期のバランス状態が保たれ続けるような位相空間上の不変なスローマニフォールドは、厳密には存在しないことをはっきりと示している。

本研究は強制散逸系を用いて、ジェットの非定常運動に伴う継続的な重力波放射を調べた点で Ford (1994) とは異なる研究である。特に、重力波ソースに着目し、近傍場と遠方場について重力波ソースの近似を得たのは本研究が初めてである。重力波ソースを用いた遠方場の重力波の計算では、Ford (1994) と異なる計算方法を用いて計算精度を高めた。これによって、遠方場の重力波にきく近似ソースの導出が可能になった。

本研究は以下よりなる。2 節では、基礎方程式系と非線形数値実験の方法について記述する。3 節では、重力波のソースを求めるために、強制散逸 f 平面浅水系におけるライトヒル方程式を導入する。また、これを解くことにより、ソースの遠方の重力波を計算する方法を示す。バランスした回転成分流の時間発展と、そこからの重力波放射を含む数値実験の結果は 4 節で示す。そして、5 節では重力波ソースについて 2 種類の近似を導出する。1 つはジェットの近傍場の近似で、他方は遠方場での重力波振幅に寄与するソースの近似である。6 節で議論を行い、7 節で結論を示す。

2. 基礎方程式系と実験設定

本研究で用いる基礎方程式系は、強制と散逸のある f 平面浅水方程式系で、これは回転成分流のモードと重力波のモードを持つもっとも簡単な方程式系である。回転角速度 $f/2$ (f はコリオリパラメータ) で回転する平面における、一般に f 面と呼ばれる系での、方程式は以下になる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \underbrace{\alpha(u - \bar{u})}_{\text{forcing}} - \underbrace{\beta(u - \bar{u})}_{\text{absorber}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \underbrace{\alpha(v - 0)}_{\text{forcing}} - \underbrace{\beta(v - 0)}_{\text{absorber}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + (H_0 + \eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \underbrace{\beta(\eta - \bar{\eta})}_{\text{absorber}}, \quad (3)$$

ここで、従属変数 u と v は経度方向 (x) と緯度方向 (y) の速度で、自由表面変位 η は平均水深 H_0 からのずれである。 \bar{u} と $\bar{\eta}$ は以下で定義する基本場の帯状なジェットである。外部パラメータ g は重力加速度である。緩和時間 α と β のかかる項は、ジェットを維持する強制の効果と、 y 境界付近で重力波を散逸させる波吸収層の効果を表す。前者はジェット領域のみに、後者は境界付近の領域にのみ加えた。

基本場は帯状ジェットで、これは Hartmann (1983) で導入された順圧不安定なジェットである。

$$\bar{u}(y) = U_0 \operatorname{sech} \left\{ \frac{2(y - y_0)}{B} \right\}, \quad (4)$$

ここで、 U_0 , y_0 , B はそれぞれ、ジェットの強さ、位置、幅を与えるパラメータである。帯状なジェットと地衡流バランスにある自由表面変位を次で与えた。

$$\bar{\eta}(y) = - \frac{f B U_0}{g} \arctan \left\{ \exp \left(\frac{2(y - y_0)}{B} \right) \right\}. \quad (5)$$

本研究では、幅 B と強さ U_0 をそれぞれ長さスケールと速さスケールにとった。これによって、無次元パラメータ Ro (ロスビー数) と Fr (フルード数) を以下のように定義した。

$$Ro \equiv \frac{U_0}{f B}, \quad Fr \equiv \frac{U_0}{\sqrt{g H_0}}. \quad (6)$$

本研究では、 $f = 1$ かつ $B = \pi/10$ のもと、 $Ro = 100$ かつ $Fr = 0.3$ に固定して、数値実験を行った。そうすると、 Ro は $U_0 = 10\pi$ を与え、 Fr は Ro 固定のもと $1/\sqrt{g H_0} = 10\pi/0.3$ を与える。またジェット領域に加えた強制のパラメータ $\alpha = 8$ も固定した。

数値実験の領域は 2 重周期境界に設定し、 x 方向に周期 2π , y 方向に周期 128π である。図 1 に $Ro = 100$, $Fr = 0.3$ における帯状な基本場ジェットの緯度構造の一例を、帯状なジェット流の強さ $\bar{u}(y)$, 自由水面変位 $\bar{\eta}(y)$, ポテンシャル渦度の緯度変化 $d\bar{q}(y)/dy$ ($q = (\zeta + f)/h$; ここで、 $\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ は渦度, $h = \eta + H_0$ は全水深) について示す。緯度方向は B の 1280 倍に設定し、周期境界条件を満たすように、逆方向に流れる 2 つのジェットを $y_0 = 32\pi$ と 96π に中心がくるように配置した。また \bar{u} はジェットの中心に関して対称であるのに対して、これと地衡流バランスにある $\bar{\eta}$ は反対称である。すなわち、全水深は $y = 64\pi$ で最も浅く、 $y = 0$ かつ 128π で最も深い。 $d\bar{q}(y)/dy$ がジェット領域で符号を変えることから、この基本場のジェット流はよく知られた順圧不安定の必要条件を満たしている (Ripa, 1983)。

非線形数値実験では、浅水方程式 (1)-(3) を従属変数 (ζ, δ, Φ) の、渦度、発散 ($\delta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$), ジオポテンシャルハイト ($\Phi = gh$) の以下の方程式に書き換えた。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} - f\delta - \underbrace{\alpha(\zeta - \bar{\zeta})}_{\text{forcing}} - \underbrace{\beta(\zeta - \bar{\zeta})}_{\text{absorber}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} + f\zeta - \nabla^2(E + \Phi) - \underbrace{\alpha(\delta - 0)}_{\text{forcing}} - \underbrace{\beta(\delta - 0)}_{\text{absorber}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} - \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} - \underbrace{\beta(\Phi - \bar{\Phi})}_{\text{absorber}}. \quad (9)$$

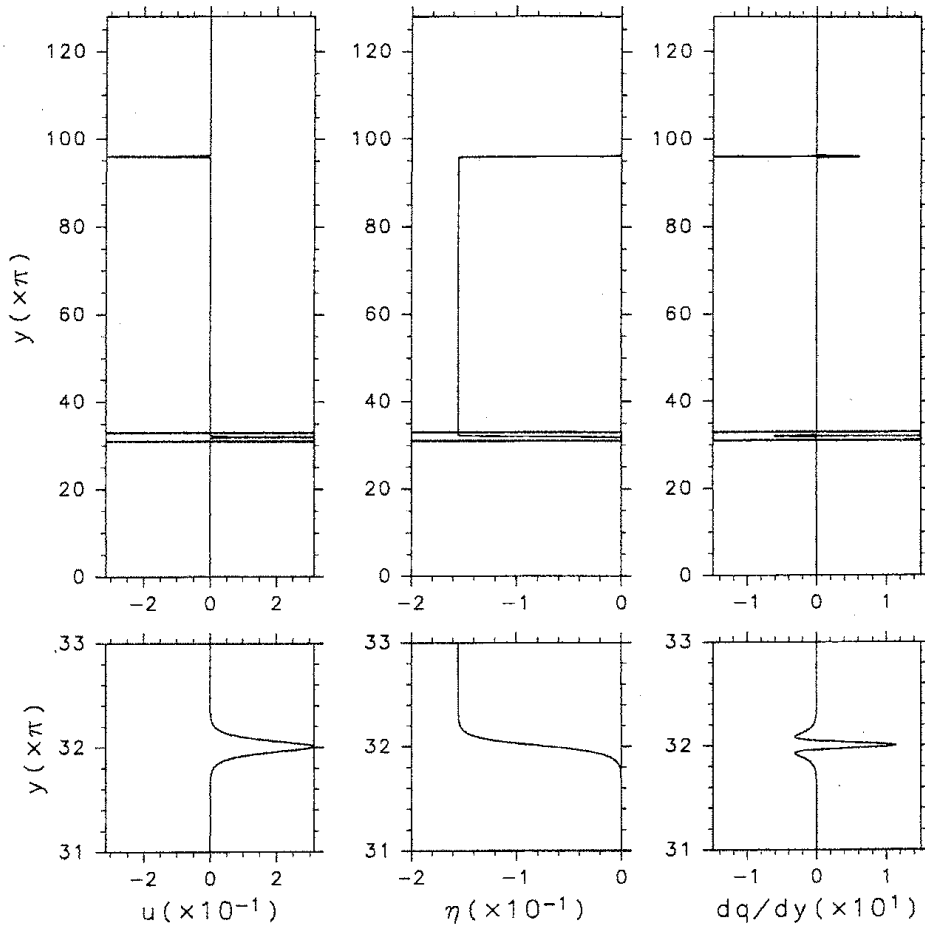


図1: $Ro = 100$, $Fr = 0.3$ での帯状な基本場の緯度構造の全領域 (上) とジェット領域の拡大図 (下): (左) 流速 $\bar{u}(y)$, (中) 自由表面変位 $\bar{\eta}(y)$, (右) ポテンシャル渦度の y 微分 $d\bar{q}(y)/dy$.

ここで, $E = (u^2 + v^2)/2$ で, (u, v) は流線関数 ψ と速度ポテンシャル ϕ を $\zeta = \nabla^2 \psi$ と $\delta = \nabla^2 \phi$ で定義して, $(u, v) = (-\partial\psi/\partial y + \partial\phi/\partial x, \partial\psi/\partial x + \partial\phi/\partial y)$ より得られる. $\bar{\zeta}$ と $\bar{\Phi}$ は基本場 (4) と (5) より計算される. (7)-(9) をスペクトル変換法 (Ishioka, 2002) によって計算した. すなわち, 従属変数を以下に展開し,

$$W(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L s_{kl}(t) e^{ikx} e^{ily/64}, \quad (10)$$

ここで, $W(x, y, t)$ は ζ, δ, Φ を表し, K と L はそれぞれ x 方向と y 方向の切断波数である. 物理空間における ζ, δ, Φ の時間発展が以下に書けるとし,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = Z(x, y, t), \quad (11)$$

ここで, Z は (7)-(9) の右辺をそれぞれ表す. これより, 時間発展の係数 s_{kl} が次の正変換によって求められる.

$$\frac{ds_{kl}}{dt} = \frac{1}{(64\pi)^2} \int_0^{128\pi} \int_0^{2\pi} Z(x, y, t) e^{-ikx} e^{-ily/64} dx dy. \quad (12)$$

領域サイズはジェット領域からの重力波放射を見るため、 y 方向に長くとり、 $K = 21, L = 5376(64 \times 16384 \text{ グリッド})$ に設定した。時間積分は4次精度のルンゲクッタ法を用いて、時間刻み0.0002で行った。強制はジェットの領域のまわり ($28.5\pi \leq y \leq 35.5\pi, 92.5\pi \leq y \leq 99.5\pi$) に導入した。また波吸収層を境界と2つのジェットの間の領域 ($y \leq 12.5\pi, 51.5\pi \leq y \leq 76.5\pi, 115.5\pi \leq y$) に導入し、これらの領域を横切る重力波を散逸させた。同時に、数値粘性項 $\nu(\nabla^2)^5 W$ を数値計算の結果が滑らかになるように課し、粘性係数を $\nu = 10^{-34}$ に固定した。

3. f 平面浅水系におけるライトヒル方程式

この節では、音響学における渦からの音波放射理論 (Lighthill, 1952) の類推によって、重力波のソースを導出する。強制散逸のある f 平面浅水系 (1)-(3) を次のフラックス形に書き換える。

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(huu)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} - fhv + \frac{1}{2}g\frac{\partial h^2}{\partial x} + \alpha h(u - \bar{u}) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(hvu)}{\partial x} + \frac{\partial(hvv)}{\partial y} + fhu + \frac{1}{2}g\frac{\partial h^2}{\partial y} + \alpha hv = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

ここで、ジェット領域の重力波ソースに着目するため、波吸収層の項は無視している。(13)-(15) から、強制散逸のある系におけるライトヒル方程式を以下に得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 - c_0^2 \nabla^2 \right) \frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} - F, \quad (16)$$

ここで、 $x_1 = x, x_2 = y$ で $c_0 = \sqrt{gH_0}$ は最も早い重力波の位相速度を表す。左辺は重力波の伝播を表し、右辺は重力波のソースを表す。ここで T_{ij} と F は以下に書け、

$$T_{ij} = \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial t} + \frac{f}{2}(\epsilon_{ik} h u_j u_k + \epsilon_{jk} h u_i u_k) + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial t} (h - H_0)^2 \delta_{ij}, \quad (17)$$

$$F = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h(u - \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \right) + \alpha f \left(\frac{\partial(hv)}{\partial x} - \frac{\partial h(u - \bar{u})}{\partial y} \right), \quad (18)$$

ここで、 $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = -1, \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ で $u_1 = u, u_2 = v$ である。

次に、(16) を解いて、ソース域から離れた場所での x 方向に平均した重力波 $\partial \bar{h} / \partial t$ を計算する。

$$\frac{\partial \bar{h}(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{2c_0} \int_{t_0}^t dt' \int_{y_-}^{y_+} dy' J_0 \left(f \sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{y-y'}{c_0} \right)^2} \right) \left[\frac{\partial^2 \overline{T_{22}}(y', t')}{\partial y'^2} - \overline{F}(y', t') \right], \quad (19)$$

ここで、 $y_{\pm} = y \pm c_0(t-t')$ である。 $\partial^2 \overline{T_{22}}(y', t') / \partial y'^2$ 及び $\overline{F}(y', t')$ は (17) と (18) を x 方向に平均したソース項である。(19) を y 方向に一度積分し、次の方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{h}(y, t)}{\partial t} = \frac{1}{2c_0} \int_{t_0}^t dt' \left[\frac{\partial \overline{T_{22}}(y_+, t')}{\partial y} + \overline{F'}(y_+, t') - \frac{\partial \overline{T_{22}}(y_-, t')}{\partial y} - \overline{F'}(y_-, t') \right] + D, \quad (20)$$

ここで、 $\overline{F'}(y, t')$ は (18) のソース項を x 方向に平均して y 方向に一度積分したもので、 D は分散性の効果を表す項である。もし、ジェット近傍のソースが与えられれば、(19) もしくは (20) より、ジェット

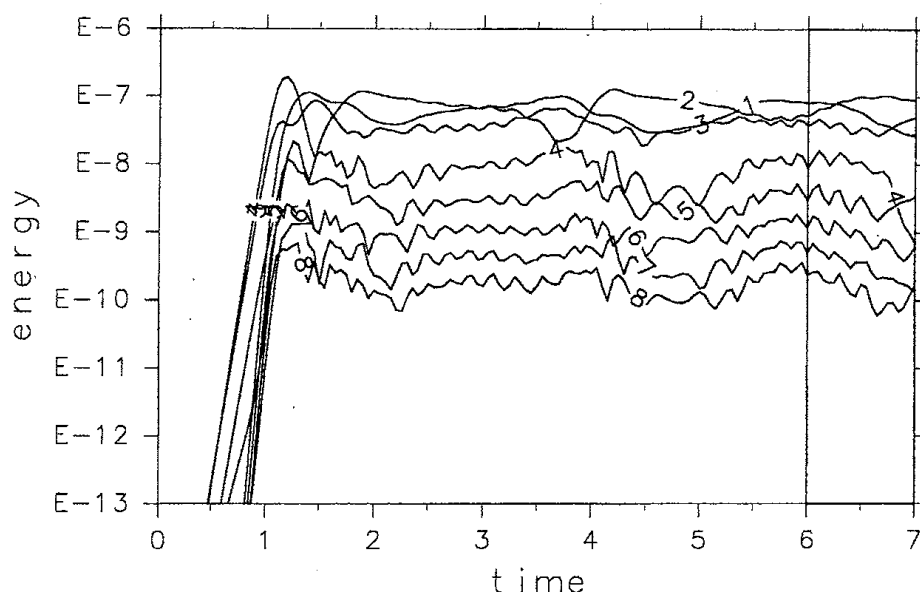


図2：エネルギーの x 方向の各波数成分 ($k = 1 - 8$) の時間発展. $0 \leq t \leq 7.0$ の時間について示す.

領域から離れた場所での重力波を評価することができる. 4節の遠方場の計算では, (19) を用いるとあまり精度がよくないため, (20) を用いた. また本研究で用いたパラメータでは, 重力波の分散性は小さいため, 4節での (20) の計算では, 分散性の効果 D は省いている.

4. 結果

この節では, 数値実験の結果を示す. $\Phi = gh$ より h と Φ は g の定数倍を除いて物理的に同じ意味をもつ. 以下では, 簡単のため $g = 1$ として図を作成した. 図2はエネルギーの時間発展を x 方向の各波数 ($k = 1 - 8$) ごとに示したものである. 順圧不安定の線形段階 ($t \leq 1.0$) では, エネルギーの各波数成分は時間とともに指数的に増加する一方, 非線形段階 ($t \geq 1.0$) では, 各波数成分が相互作用し, エネルギーは時間とともに非定常に変化する.

非線形段階での $x = \pi$ における $\partial h / \partial t$ の $t - y$ 図を図3に示す ($6.0 \leq t \leq 7.0$, $16\pi \leq y \leq 48\pi$). (16) よりソースが存在しないとき, $\partial h / \partial t$ は線形重力波の伝播を示すことから, $\partial h / \partial t$ は重力波のよい指標となる. ジェットが時間とともに非定常に変化する過程で, ジェット領域 ($y = 32\pi$ 辺り) から重力波は線形な重力波の位相速度 $\sqrt{gH_0} = 10\pi / Fr = 100\pi / 3$ にそって継続的に放射されている. これらの重力波の波長はジェット領域の幅に比べて非常に長い.

図4は渦度 ζ (上段), $\partial h / \partial t$ と (16) から計算した全ソース (中段), ジオポテンシャルハイト Φ (下段) の時間発展の一例である. $t = 6.05$ では, 渦度の強い領域はジェットの北側 $(x, y) = (0.3\pi, 32.2\pi)$ の辺りにあり, これらの領域に強い重力波ソースが存在することがわかる. この強い渦度領域が減衰していくにつれ ($t = 6.15, 6.25$), このソース領域はだんだん弱くなっていく. そして, 別の強い渦運動がジェットの南側 $(x, y) = (1.3\pi, 31.8\pi)$ 辺りに引き起こされ ($t = 6.25$), 新たなソース領域に発達していく ($t = 6.35$ の $(x, y) = (1.7\pi, 31.8\pi)$ 辺り). $\partial h / \partial t$ 場で見ると, このようにソースが時間とともにしだいに変化していく過程で, 重力波を示す $\partial h / \partial t$ は渦度の強い領域から継続的に放射されている. 渦

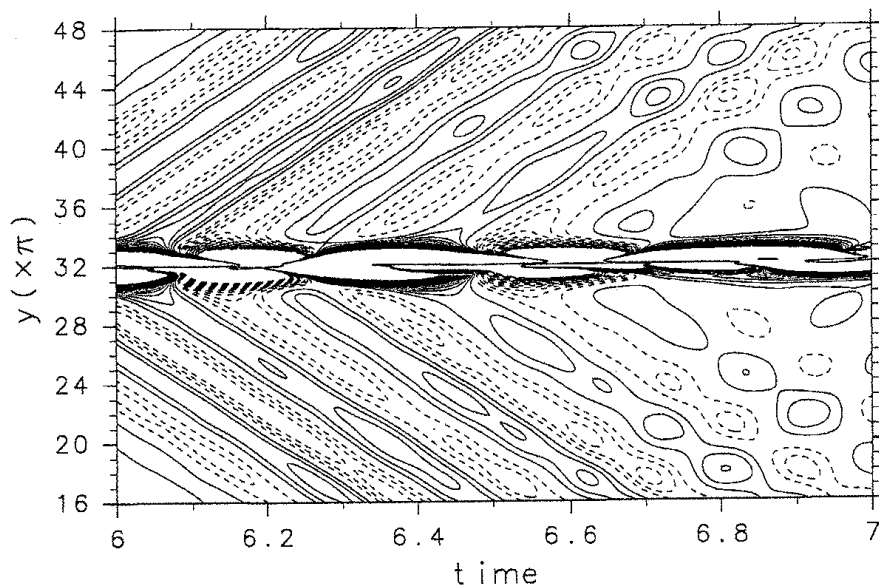


図3: $x = \pi$ における $\partial h / \partial t$ の $t-y$ 断面図. $6.0 \leq t \leq 7.0$, $16\pi \leq y \leq 48\pi$ について示す. コンター間隔は1で, 正の値とゼロ値は実線, 負の値は破線である.

度場の時間発展はソースの時間変化を引き起こし, 放射される重力波の振動数はこれらの渦度場の振動数によって基本的に決定される. ソースの近傍では, 重力波の x 方向波数はその領域のソースの波数に一致して波数2であるが, 遠方場では重力波は x 方向に帯状な構造を持っている. 理由は以下になる. この系では, 重力波の分散関係は次で,

$$\omega = \pm \sqrt{f^2 + gH_0(k^2 + l^2)}, \quad (21)$$

ここで, ω は角振動数を意味し, k, l はそれぞれ x 方向と y 方向の波数である. (21) から, 以下を得る.

$$l^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{gH_0} - k^2. \quad (22)$$

図2と図3はジェット領域の渦運動の角振動数 $\omega = 2\pi\nu \sim 27$ (ν は振動数) を示しており, また(6)から第1項の分母が $gH_0 = (u_0/Fr)^2 = (100\pi/3)^2$ と非常に大きいため, (22) の第1項は非常に小さい. それゆえ, x 方向の波数 $k = 2$ の重力波では(22)において l^2 が負である. このため, $k = 2$ の重力波はソース領域から伝播できないことになる. この実験パラメータ ($Ro = 100$, $Fr = 0.3$) では, 渦度場とジオポテンシャル場は主に旋衡風バランスにあるため, 強い渦度領域は浅い水深を伴っている.

図4で見たようにジェット領域から離れた遠方場では, 重力波はほぼ帯状な構造をとるので, ここでは伝播可能な帯状な重力波のみに着目する. 図5はジェットから離れた遠方の $\partial \bar{h} / \partial t$ の時間変化を各緯度について記したものと, (20) から分散関係を省いて理論的に計算したものである. 重力波はジェット領域から最も早い重力波の位相速度にそって放射されている. 境界でいくらかの重力波の反射がおこっていると考えられるものの, 周期や振幅において, 遠方場の $\partial \bar{h} / \partial t$ が帯状平均したライトヒル方程式の解から十分精度よく求まっていることを示している. この結果によって, 本研究の数値計算の妥当性が確認された.

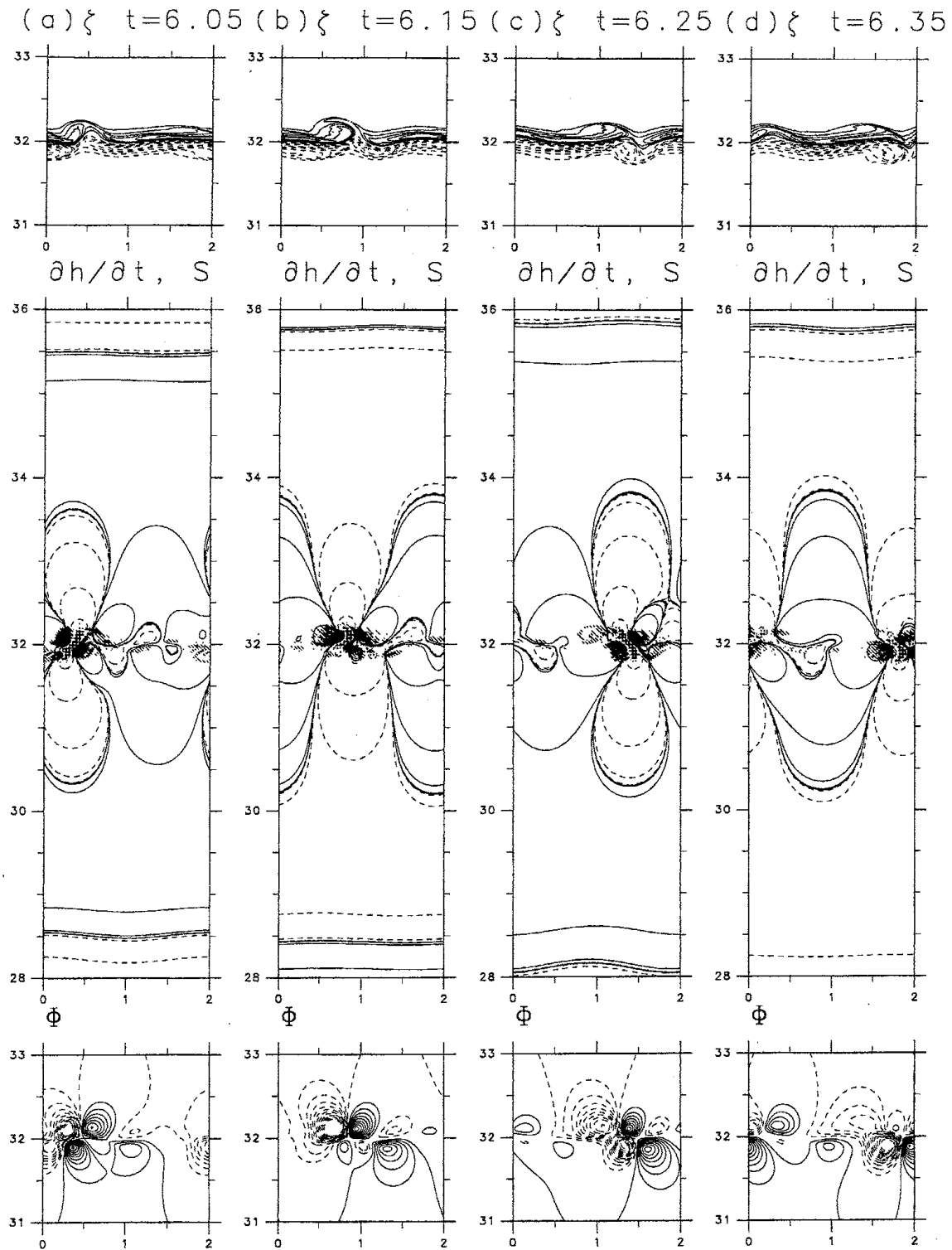


図4: ζ (上段), $\partial h/\partial t$ (コンター) と (16) の右辺の全ソース (トーン)(中段), Φ (下段) の時間発展 ((a) $t = 6.05$, (b) $t = 6.15$, (c) $t = 6.25$, (d) $t = 6.35$) の一例を $x - y$ 平面 ($x - y$ 軸の単位は π) で示す. コンター間隔は ζ で 1.5, $\partial h/\partial t$ で 10^i , $\{i: -3 \text{ から } 8 \text{ までの整数}\}$ で, Φ で 5 である. 正の値とゼロ値のコンターは実線, 負の値のコンターは破線である.

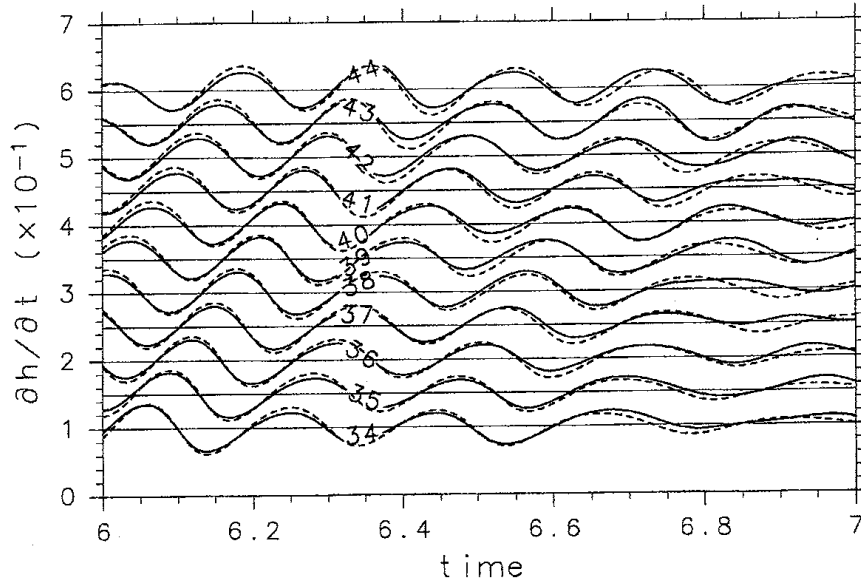


図5：各緯度での $\partial \bar{h} / \partial t$ (実線) と (20) からジェット領域の全ソースを用いて計算したもの (破線). 各線はそれぞれ $y = 34\pi, 35\pi, 36\pi, 37\pi, 38\pi, 39\pi, 40\pi, 41\pi, 42\pi, 43\pi, 44\pi$ である. ここで各線のゼロ線は緯度毎に $d = 0.5(y - 32\pi)/\pi$ だけずらしてある.

5. 重力波ソースの近似

この節では, (16) の右辺の重力波ソースの近似を行う. 近傍場のソースと遠方場の重力波振幅に寄与するソースの2種類について近似を導出する.

5.1 ジェット近傍のソース

ジェット領域における支配的な流れがほとんど非発散な回転成分流であるという仮定のもとに, ジェット近傍のソースを近似する. 回転成分流によるソースに着目するため, 強制 α , コリオリ f , $\partial h / \partial t$ の項を無視する. さらに, この系では $|u| \gg |v|$ であることを考慮すると, (16) の右辺は次の形に近似できる.

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T_{ij} - F \approx 2hu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (23)$$

図6は $t = 6.05$ における全ソース (左) と (23) の近似ソース (右) の一例である. (23) の近似によって, ジェット領域に局在する強いソースの特徴がよく表現されていることがわかる. この近似の結果から, ジェット近傍の重力波ソースは主に非発散な回転成分流のみでほぼ説明可能であることがわかる.

5.2 遠方場に寄与するソース

5.1 節では支配的な流れが非発散な回転成分流であるという仮定のもとに, ジェット近傍の近似ソースを導いた. しかしながら, この近似ソースを用いた遠方の重力波の計算は精度がよくない (図には示さない). 遠方場の帯状な重力波については, 他の近似が必要である.

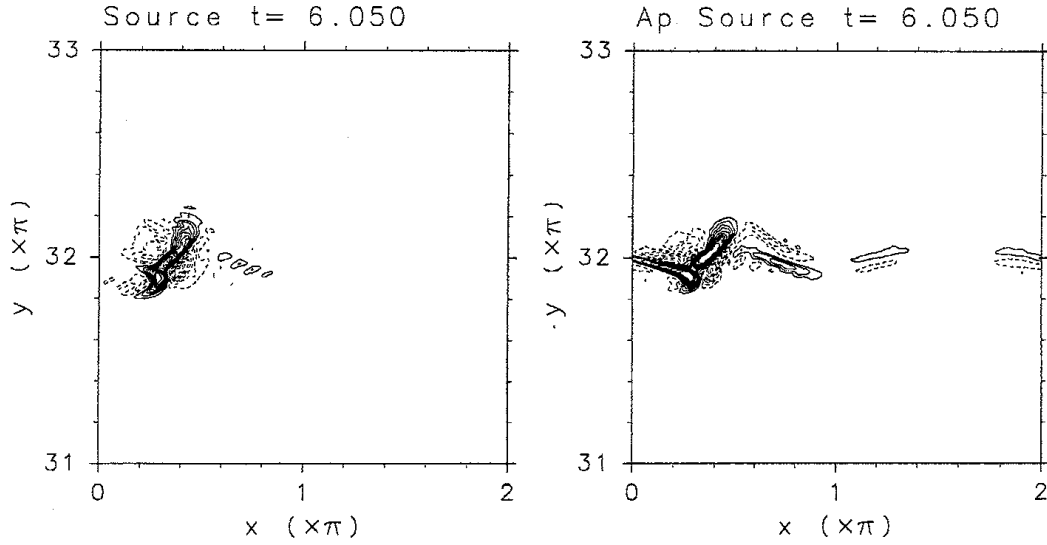


図6: $t = 6.05$ での全ソース (左) と (23) の近似したソース (右) の一例.

5.2.1 深さの緯度変化に関わるソース

この小節では, ジェットから離れた領域での帯状な重力波を近傍場とは別の近似ソースによって求める. 最初に, 重力波の分散関係式 (21) において, 水深が十分深いため f^2 の項が無視できるので, (20) の計算においても分散性の項を無視する. また 5.1 節と同様に, 強制 α , コリオリ f および $\partial h / \partial t$ の項も無視する. (1) と (3) を使って T_{22} の第 1 項を書き換えると,

$$\begin{aligned} T_{22} &\approx \frac{\partial(hv^2)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} v^2 + 2hv \frac{\partial v}{\partial t} \\ &\approx 2hv \left(-u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - fu - g \frac{\partial h}{\partial y} - \alpha v \right). \end{aligned} \quad (24)$$

ここで $\partial h / \partial t$ の項は仮定により無視した. 従属変数 (u, v, h) を基本場 $(\bar{u}(y), 0, \bar{h}(y))$ とそこからの擾乱 (u', v', h') にわけ, (24) を擾乱について 2 次の項までを残して書き換える.

$$T_{22} \approx 2\bar{h}v' \left(-\bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} - fu' - g \frac{\partial h'}{\partial y} - \alpha v' \right). \quad (25)$$

ここで, 基本場のバランスを使って, 擾乱の 1 次の項を消去した. また, 右辺第 1 項は帯状平均によって消えるため, 右辺の () 内の残りの 3 項についてスケール解析を行う. U', L', H' を擾乱の速度, 長さ, 自由表面変位のスケールとし,

$$\overline{T_{22}} \approx 2\bar{h}v' \left(-fU'u^\dagger - \frac{gH'}{L'} \frac{\partial h^\dagger}{\partial y^\dagger} - \alpha U'v^\dagger \right), \quad (26)$$

ここで, \dagger のあるすべての新しい擾乱の変数は $O(1)$ である. これより, 以下が得られる.

$$\overline{T_{22}} \approx fU'2\bar{h}v' \left(-u^\dagger - Ro \frac{\partial h^\dagger}{\partial y^\dagger} - \frac{\alpha}{f} v^\dagger \right), \quad (27)$$

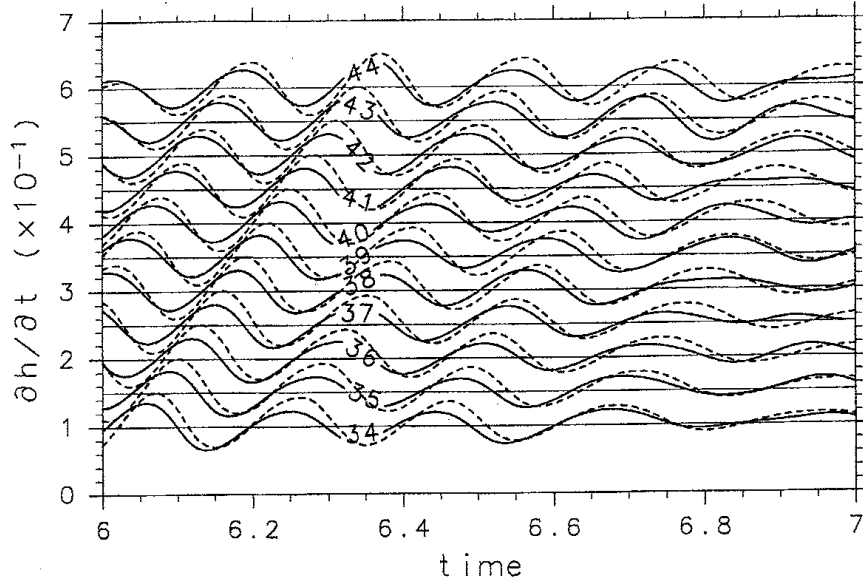


図7：各緯度における $\partial \bar{h}/\partial t$ (実線の意味は図5と同様) と (28) の近似ソースによる計算 (破線)。

ここで, Sugimoto *et al.* (2004a) 及び2章の結果である Ro の大きい領域におけるバランスした擾乱のスケール則 ($gH'/fL'U' \sim Ro$) を考慮した。すなわち, Ro の大きい領域では, (27) の右辺第1項が右辺第2項に比べて無視できることになる。本実験では, $Ro = 100$, $\alpha = 8$, $f = 1$ に固定したため, 第3項も無視でき, 最終的に以下の近似が得られる。

$$\overline{T_{22}} \approx -2hv \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}. \quad (28)$$

この式は水深の緯度変化と緯度方向の質量フラックスの積に関わる項が重力波の放射を引き起こすことを示している。

図7は (28) の近似ソースを用いて (20) の計算をした図5と同様の図である。近似ソース (28) から遠方の $\partial \bar{h}/\partial t$ がよい精度で見積もれることがわかる。

5.2.2 渦運動に関わるソース

この小節では, 音響学における渦からの音波放射理論の類推によって, より直接的に渦運動に結び付く別の近似ソースを導出する (Powell, 1964; Howe, 1975)。Crow (1970) はマッハ数 ($M = U/c_a$: U は流れの特徴的な速さで c_a は音波の位相速度) が小さいなら, 支配的な流れを非圧縮として近似できることを示した。本研究では, Fr は物理的に M と同じ意味を持つ。実験パラメータ $Fr = 0.3$ は十分に小さいと考えられるので, 支配的な流れを非発散として近似可能である。再び強制 α , コリオリ f , $\partial h/\partial t$ の項を (16) で無視して以下を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \right) \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j \right). \quad (29)$$

非発散な流れでは, 次の式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \nabla^2 \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad (30)$$

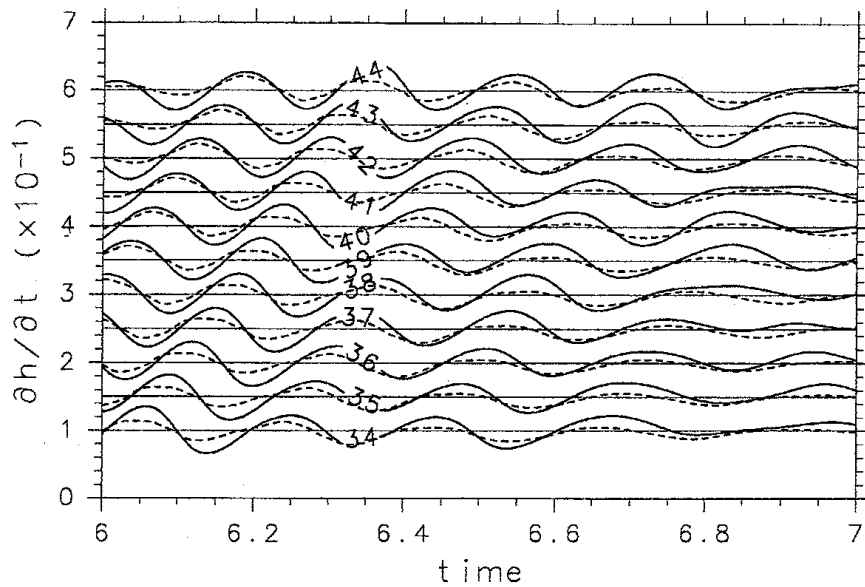


図8：各緯度における $\partial \bar{h} / \partial t$ (実線の意味は図5と同様) と (31) の近似ソースからの計算 (破線)。

ここで、 $\omega = (0, 0, \zeta)$ は渦度ベクトルで、 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ は速度ベクトルである。Howe (1975) はソースから離れた領域での音波を計算し、(30) の第2項からの寄与が第1項の $O(M^2)$ になることを示した。彼は、もし M が小さいなら、ソースの遠方場における音波への主な寄与は Powell (1964) によって導かれた渦による近似ソースと同じであると結論した。このことは、遠方場の帯状な重力波の主なソースが以下であることを示唆する。

$$h \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\omega \times \mathbf{u}). \quad (31)$$

このソースは渦度 ω の空間変化の強い領域が重力波のソースになることをはっきりと示している。

図8は (31) の近似ソースを用いて (20) の計算をした図5、図7と同様の図である。渦による近似ソース (31) から遠方の重力波がそれなりの精度で計算できることがわかる。(28) と (31) の両方が遠方の $\partial \bar{h} / \partial t$ を近似的に計算することができる。しかしながら、われわれのオリジナルな (28) の近似ソースの方が渦による近似ソース (31) より全ソース (17) を用いた計算値に近いのは興味深い結果である。

6. 議論

強制散逸のある f 平面浅水系において不安定なジェットの非線形数値実験を行った。そして、回転成分流の非定常運動に伴う継続的な重力波放射 (図3参照) と、ジェット領域の重力波ソースの局在 (図4参照) を示した。我々のモデルは現実大気重力波放射を調べるには、極めて簡略化されたモデルであるが、本研究の結果は、バランスした回転成分流が支配的な無次元パラメータ領域にあっても、現実大気においてもジェット流からの重力波放射の可能性を強く示唆する結果である。また、浅水系は強い成層があるという仮定のもとで導かれるため、この系には水平方向にのみ伝播可能な外部重力波のみしか含まれない。一方、現実大気には水平、鉛直ともに伝播可能な内部重力波が存在する。これらの

内部重力波はもっと簡単に非定常運動するジェットから放射されると考えられる。一般の系での重力波放射への適用にはさらなる研究が必要であるが、我々の用いた方法と同様の方法で、より一般的なモデルにおいても重力波のソースの導出が可能であると考えられる。現実大気においても、我々が導いたソースの近似と同様な近似が得られるかどうかは興味深い研究課題である。

我々は重力波のソースに着目し、ジェットの近傍場で成り立つ近似ソース (5.1 節参照) と、ジェットの遠方場で帯状な重力波振幅に寄与する近似ソース (5.2.1 節参照) の 2 種類の近似を導出した。ジェット流の近傍領域では、強い渦運動に伴うソースが存在する (図 4 参照)。これらのソースは支配的な流れが非発散な回転成分流であるという仮定のもとに近似できた (図 6 参照)。しかしながら、この強いソースは重力波を直接的には遠方に放射できない。これは、4 節で記したように、渦運動の振動数が小さく水深がとても深いため、波数構造を持つ重力波が非伝播性になるためである。強制散逸系では、強制的パラメータを選ぶことによって、渦運動の振動数を高くすることが可能である。また、ジェットの強さを固定した場合、大きい Fr では水深が浅くなる。このような実験では、帯状以外の波数構造をもった重力波も放射されると考えられる。我々の次のステップの 1 つは、この強制や無次元パラメータ Ro , Fr を変化させ、波数構造のある重力波放射について調べることであろう。

一方、ジェットの遠くの領域では、帯状な重力波を近傍場とは別の近似ソースによって見積もった (5.2.1 節参照)。この近似ソースを得るため、 Ro の大きい領域でのバランスした擾乱に成り立つスケール則を考慮し、スケール解析を行った。古典的な渦による近似ソースは渦の非定常運動に伴う重力波放射と直接的につながっているが、我々の水深の緯度変化と緯度方向の質量フラックスの積による近似ソースもまた、理解しやすい記述である。さらに、我々の近似ソースによる計算の方が古典的な渦によるソースに比べ、より精度よく遠方の重力波振幅を計算できた (図 7, 図 8 参照)。とても広い波吸収層を設定したにもかかわらず、これらの波吸収層において重力波の反射がそれなりに起こっている。このため、全ソース (16) を用いた計算でさえも実験結果とのずれが生じている (図 5 参照)。一方、ジェットの近傍では重力波の分散性が実験結果と全ソースを用いた重力波振幅の理論計算とのずれを生む可能性がある。

本研究では、1 つのパラメータ ($Ro = 100$, $Fr = 0.3$) についての実験結果のみを示した。重力波の近似が他のパラメータ領域でも成り立つかは興味あるところである。 Fr が小さければ、流れは近似的に非発散とみなせるので、近傍場のソースは同様に近似でき、遠方場の重力波にきく近似ソースも同様のスケール解析で導かれることが期待できる。しかしながら、 Fr が大きくなると、支配的な流れは非発散として近似できなくなるため、他の項が無視できなくなるであろう。さらに、もし Ro が小さくなると、5.2.1 節で導入した、バランスした擾乱に成り立つスケール則が異なってくる (Sugimoto *et al.*, 2004a)。このため、小さい Ro では近似が妥当でなくなると考えられる。また、地球回転の効果 f が効いてくる小さい Ro では、分散性のある重力波が放射されるであろう。これらの分散性のある重力波の理論計算では、(20) の計算において分散性の項が無視できなくなると考えられる。系統的なパラメータスイープ実験を次の研究で行う予定である。

7. 結論

現実大気における、回転成分流からの重力波放射の可能性を示唆した研究を動機として、簡略化モ

デルである強制散逸のある f 平面浅水系において、回転成分流の非定常運動に伴う重力波放射を非線形数値実験によって調べた。その結果、ほとんどバランスしていると考えられるジェット流の非定常運動に伴って (図2参照)、重力波がジェット領域から継続的に放射された (図3参照)。

音響学における渦からの音波放射理論の類推によって、この系における重力波ソースを導出した。そして、これを用いて強い回転成分流のある領域に重力波のソースが局在することを示した (図4参照)。このソースがジェットの非定常運動に伴って時間的に変化する過程で、重力波は継続的に放射された。すなわち、ジェットの非定常運動の振動数が放射される重力波の振動数を基本的に決めていた。また、ジェットの近傍では重力波のソースは経度方向に波数2の構造を持つ一方で、放射される重力波は遠方で帯状な構造を持っていた (図4参照)。これは、重力波の分散関係を考えると、ジェットの非定常運動の振動数が小さく水深が深い時には、波数構造のある重力波が非伝播性になるためである。この遠方場の帯状な重力波は、ライトヒル方程式の解からジェット近傍のソースを用いて計算できた (図5参照)。この計算では精度をよくするために、一度 y 方向に積分したものを導出して用いた。これにより、反射波等の影響はあれ、本研究の非線形数値実験でジェットから放射される重力波の妥当性が示された。

さらに、重力波のソースについて、近傍場と遠方場それぞれで近似ソースを導出した。ジェット近傍の重力波ソースは、支配的な流れが非発散な回転成分流であるという仮定のもとに近似可能である (図6参照)。これより、ジェット近傍のソースは回転成分流によるものであることが示される。一方、遠方の帯状な重力波は、ジェット近傍の近似ソースからは精度よく計算できなかった。そこで、バランスした擾乱で成り立つスケール則を考慮したスケール解析を帯状平均したソースに行い、全ソースを1項のみで近似することに成功した。この近似ソースは、水深の緯度変化と緯度方向の質量フラックスの積に関わる形で物理的に理解しやすいのみならず、古典的な渦による近似ソースより遠方の重力波を精度よく計算できることがわかった (図7, 図8参照)。

謝辞

非線形実験に用いた数値モデルは石岡圭一先生の作成したライブラリ (ISPACK) を用いて作成しました。数値実験は京都大学大型計算機センターの計算機および京都大学生存圏研究所共同利用プロジェクトとして電波科学計算機実験装置 (KDK) を用いて行いました。作図には地球流体電脳ライブラリを用いました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- Crow, S. C. 1970. Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem. *Stud. Appl. Maths*, **49**, 21–44.
- Ford, R. 1994. Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **281**, 81–118.

- Ford, R., McIntyre, W. E. and Norton, W. A. 2000. Balance and the slow quasimanifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236–1254.
- Fritts, D. C. and Nastrom, G. D. 1992. Source of mesoscale variability of gravity waves. Part II: Frontal, convective, and jet stream excitation. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 111–127.
- Gill, A. E. 1977. Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, **80**, 641–671.
- Hartmann, D. L. 1983. Barotropic instability of the polar night jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 817–835.
- Holton, J. R., Haynes, P. H., McIntyre, M. E., Douglass, A. R., Road, R. B., and Pfister, L. 1995. Stratosphere-troposphere exchange. *Rev. Geophys.*, **33**, 403–439.
- Howe, M. S. 1975. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, **71**, 625–673.
- Ishioka, K. 2002. ispack-0.61, <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>, GFD Dennou Club.
- Kitamura, Y. and Hirota, I. 1989. Small-scale disturbances in the lower stratosphere revealed by daily rawin sonde observations. *J. Meteor. Soc. Japan*, **67**, 817–831.
- Lighthill, M. J. 1952. On the Sound generated aerodynamically, I. *Proc. Roy. Soc. London*, **211A**, 564–587.
- May, P. T. 1996. The organization of convection in the rainbands of tropical cyclone Laurence. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 807–815.
- O'Sullivan, D. and Dunkerton, T. J. 1995. Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3695–3716.
- Pfister, L. W., Chan, K. R., Bui, T. P., Bowen, S., Legg, M., Gary, B., Kelly, K., Proffitt, M., and Starr, W. 1993. Gravity waves generated by a tropical cyclone during the step tropical field program: a case study. *J. Geophys. Res.*, **98**, 8611–8638.
- Plougonven, R., Teitelbaum, H. and Zeitlin, V. 2003. Inertia-gravity wave generation by the tropospheric mid-latitude jet as given by the FASTEX radiosoundings. *J. Geophys. Res.*, **108**, 14-1–14-18.
- Powell, A. 1964. Theory of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, 177–195.
- Ripa, P. 1983. General stability conditions for zonal flows in a one-layer model on the β -plane or the sphere. *J. Fluid Mech.*, **126**, 463–489.
- Rossby, C. G. 1938. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain

simple current systems. II. *J. Mar. Res.*, **1**, 239–263.

Sato, K. 1994. A statistical study of the structure, saturation and sources of inertio-gravity waves in the lower stratosphere observed with the mu rader. *J. Atmos. Terr. Phys.*, **56**, 755–774.

Sato, K., Kumakura, T., and Takahashi, M. 1999. Gravity waves appearing in a high-resolution GCM simulation. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1005–1018.

Sato, K. 2000. Sources of gravity waves in the polar middle atmosphere. *Adv. Polar Upper Atmos. Res.*, **14**, 233–240.

Sugimoto, N., Ishioka, K. and Yoden, S. 2004a. Balance regimes for the stability of a jet in f -plane shallow water system. *Fluid. Dyn. Res.*, (in revision).

Sugimoto, N., Ishioka, K. and Yoden, S. 2004b. Gravity wave radiation from unsteady rotational flow on f -plane shallow water system. *Fluid. Dyn. Res.*, (in revision).

Vanneste, J. and Yavneh, I. 2004. Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 211–223.

Yoshiki, M. and Sato, K. 2000. A statistical study of gravity waves in the polar regions based on operational radiosonde data. *J. Geophys. Res.*, **105**, 17995–18011.

Zhang, F. 2004. Generation of mesoscale gravity waves in upper tropospheric jet-front systems. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 440–457.